Exercice 1:

$$\frac{1}{n^2} \ll \frac{\ln(n)}{n^2} \ll \frac{1}{n\ln(n)} \ll \frac{1}{n} \ll \frac{\ln(n)}{n}$$

Exercice 2:

1. $u_n = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} = \frac{2}{(n-1)(n+1)} \sim \frac{2}{n^2}$

2. $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1} = \frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}$

   Or, $\sqrt{n+1} \sim \sqrt{n}$ donc $\sqrt{n+1} \underset{+\infty}{=} \sqrt{n} + o(\sqrt{n})$.
   De même, $\sqrt{n-1} \sim \sqrt{n}$ donc $\sqrt{n-1} = \sqrt{n} + o(\sqrt{n})$.
   En les sommant, $\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1} = 2\sqrt{n} + o(\sqrt{n})$. Donc, $\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1} \sim 2\sqrt{n}$.
   Par quotient, $u_n \sim \frac{1}{\sqrt{n}}$.

3. $u_n = \ln(n+1) - \ln(n) = \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$.
   Or, $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$ donc $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n}$.

4. $1+\frac{1}{n} \sim 1$ et $n+\ln(n) \sim n$. Par puissance et produit, $u_n \sim 1.(n)^2 \sim n^2$.

5. $n+\ln(n) \sim n$ et $n+\sqrt{n} \sim n$. Par quotient, $u_n \sim 1$.

6. $\tan\left(\frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n}$ donc $\tan\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$. Donc, $u_n = \tan\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.
   Or, $\frac{1}{n^2} = o\left(\frac{1}{n}\right)$ donc $u_n = \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) + o\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.
   Finalement, $u_n \sim \frac{1}{n}$.

Exercice 3:

1. $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \exp\left(n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)$. Or, $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n}$ donc, par produit, $n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \sim 1$.
   Comme les équivalents préservent les limites, $\lim\limits_{n\to+\infty} n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = 1$.
   Par continuité de la fonction exponentielle, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \mathbf{e}$ et donc $u_n \sim \mathbf{e}$.

2. $\left(\frac{n^2-n+1}{n^2+n+1}\right)^n = \exp\left(n\ln\left(\frac{n^2-n+1}{n^2+n+1}\right)\right) = \exp\left(n\ln\left(1-\frac{2n}{n^2+n+1}\right)\right)$.
   Or, $\ln\left(1-\frac{2n}{n^2+n+1}\right) \sim -\frac{2n}{n^2+n+1}$ donc, par produit, $n\ln\left(1-\frac{2n}{n^2+n+1}\right) \sim -\frac{2n^2}{n^2+n+1} \sim -2$.
   En utilisant la définition d'être équivalent, $\lim\limits_{n\to+\infty} n\ln\left(1-\frac{2n}{n^2+n+1}\right) = -2$.
   Par composition des limites, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \mathbf{e}^{-2}$ et donc $u_n \sim \mathbf{e}^{-2}$.

3. $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\cos(n)}{n^2} = 0$ par le théorème d'encadrement donc $\cos(n) = o\left(n^2\right)$ et $\cos(n) + n^2 \sim n^2$.
   $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\sin(n)}{2^n} = 0$ par le théorème d'encadrement donc $\sin(n) = o(2^n)$ et $2^n + \sin(n) \sim 2^n$.
   Donc, $u_n = \frac{n^2+\cos(n)}{2^n+\sin(n)} \sim \frac{n^2}{2^n}$. Par croissance comparée, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

4. D'après la formule de Stirling, $n! \sim n^n \mathrm{e}^{-n}\sqrt{2\pi n}$. D'où $u_n \sim \frac{\mathrm{e}^{-n}\sqrt{2\pi n}}{n^n}$.
   Par croissance comparée, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Exercice 4:

1. On va revenir à la définition d'être équivalent.
$$\frac{\mathrm{e}^{u_n}}{\mathrm{e}^{v_n}} = \mathrm{e}^{u_n-v_n} \to 1 \iff \lim_{n\to+\infty}(u_n - v_n) = 0$$

2. Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = l \neq 1$, Dans les deux cas, la suite $\ln(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est non nulle à partir d'un certains rang et par composition, elle converge vers $\begin{cases} -\infty \text{ si } l = 0 \\ +\infty \text{ si } l = +\infty \\ \ln(l) \text{ sinon.} \end{cases}$.
$$\frac{\ln(u_n)}{\ln(v_n)} = \frac{\ln(\frac{u_n}{v_n}.v_n)}{\ln(v_n)} = \frac{\ln\left(\frac{u_n}{v_n}\right) + \ln(v_n)}{\ln(v_n)} = 1 + \frac{\ln\left(\frac{u_n}{v_n}\right)}{\ln(v_n)}$$
   Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = 1$ donc, par composition des limites, $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right) = 0$.
   Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 + \frac{\ln\left(\frac{u_n}{v_n}\right)}{\ln(v_n)} = 1$.
   D'où, $\ln(u_n) \sim \ln(v_n)$.

3. $\sin\left(\dfrac{1}{n+1}\right) \sim \dfrac{1}{n+1}$ et ces deux suites ont pour limite commune $0 \neq 1$ donc par la proposition précédente, $\ln\left(\sin\left(\dfrac{1}{n+1}\right)\right) \sim \ln\left(\dfrac{1}{n+1}\right) \sim \ln\left(\dfrac{1}{n}\right) \sim -\ln(n)$.

Exercice 5:
On va utiliser que $w_n + t_n > w_n$ et que $w_n + t_n > t_n$.
$$\begin{aligned} \left|\frac{u_n + s_n}{w_n + t_n} - 1\right| &= \left|\frac{u_n + s_n - w_n - t_n}{w_n + t_n}\right| \leqslant \frac{|u_n - w_n|}{w_n + t_n} + \frac{|s_n - t_n|}{w_n + t_n} \leqslant \frac{|u_n - w_n|}{w_n} + \frac{|s_n - t_n|}{t_n} \\ &\leqslant \left|\frac{u_n}{w_n} - 1\right| + \left|\frac{s_n}{t_n} - 1\right| \end{aligned}$$
Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{w_n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{s_n}{t_n} = 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n + s_n}{w_n + t_n} = 1$.

Exercice 6: Soit $a \in]1, +\infty[$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons $u_n = \frac{a^n}{n!}$.

1. On a $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{a}{(n+1)!} \to 0$.
   Donc il existe $N \in \mathbb{N}$, tel que pour tout $n \geqslant N$, $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n} - 0\right| \leqslant \frac{1}{2}$ i.e. $u_{n+1} \leqslant \frac{1}{2}u_n$.

2. Par itération immédiate, on a, pour tout $n \geqslant N$, $0 \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{2^{n-N}}u_N$.
   Par théorème d'encadrement $u_n \to 0$ i.e. $a^n = o(n!)$.

Exercice 7:

1. $\dfrac{x^2 + 2x}{2x - 1} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{x^2}{2x} = \dfrac{x}{2}$. Posons $u(x) = \dfrac{x}{2}$.

2. $\dfrac{x^2+2x}{2x-1}-\dfrac{x}{2}=\dfrac{2x^2+4x-2x^2+x}{4x-2}=\dfrac{5x}{4x-2}\underset{+\infty}{\sim}\dfrac{5}{4}$. Donc $f(x)-u(x)\underset{+\infty}{=}\dfrac{5}{4}+o(1)$.

3. On a $f(x)\underset{+\infty}{=}\dfrac{x}{2}+\dfrac{5}{4}+o(1)$. La droite $y=\dfrac{x}{2}+\dfrac{5}{4}$ est une asymptote affine à la courbe de f en $+\infty$.

Exercice 8:

1. En 0:
$\dfrac{x+1+\ln(x)}{\ln(x)}=\dfrac{x}{\ln(x)}+\dfrac{1}{\ln(x)}+1$. Or, $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x}{\ln(x)}=0$ et $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{\ln(x)}+1=1$ donc

$$\lim_{x\to 0}\frac{x+1+\ln(x)}{\ln(x)}=1\Leftrightarrow x+1+\ln(x)\underset{x\to 0}{\sim}\ln(x)$$

En $+\infty$:
$\dfrac{x+1+\ln(x)}{x}=1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{\ln(x)}{x}$. Or, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x)}{x}=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}+1=1$ donc

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x+1+\ln(x)}{x}=1\text{ i.e. }x+1+\ln(x)\underset{x\to+\infty}{\sim}x$$

2. La fonction f est continue en 0 comme composée de fonctions continues en 0 et $\cos(\sin(0))=1$ donc $\cos(\sin(x))\underset{x\to 0}{\sim}1$.

3. $\dfrac{f(x)}{\frac{\mathbf{e}^{\sqrt{x}}}{2}}=1+\mathbf{e}^{-2\sqrt{x}}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\mathbf{e}^{-2\sqrt{x}}=0$ donc $f(x)\underset{x\to+\infty}{\sim}\frac{\mathbf{e}^{\sqrt{x}}}{2}$.

4. $\dfrac{\sin(x)\ln(1+x^2)}{x\tan(x)}\underset{x\to 0}{\sim}\dfrac{x.x^2}{x.x}\underset{x\to 0}{\sim}x$.

Exercice 9:

1. $\ln(\sin(x))=\ln\left(x.\frac{\sin(x)}{x}\right)=\ln(x)+\ln\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)$. Donc, $\dfrac{\ln(\sin(x))}{\ln(x)}=1+\dfrac{\ln\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)}{\ln(x)}$.
Or, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)}{\ln(x)}=0$ donc $\ln(\sin(x))\underset{x\to 0}{\sim}\ln(x)$.

2. $\ln(\cos(x))=\dfrac{1}{2}\ln(\cos^2(x))=\dfrac{1}{2}\ln(1-\sin^2(x))\underset{x\to 0}{\sim}\dfrac{-\sin^2(x)}{2}\underset{x\to 0}{\sim}\dfrac{-x^2}{2}$.

Exercice 10:

1. $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ donc f est non nulle au voisinage de $+\infty$.
$g\underset{+\infty}{=}o(f)$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{g(x)}{f(x)}=0$.

$$\frac{\exp(g)}{\exp(f)}=\exp(g-f)=\exp\left(f\left(\frac{g}{f}-1\right)\right).$$

Or, $\lim\limits_{+\infty}f\left(\dfrac{g}{f}-1\right)=-\infty$ donc $\lim\limits_{+\infty}\dfrac{\exp(g)}{\exp(f)}=0$ donc $\exp(g)\underset{+\infty}{=}o(\exp(f))$.

2. La réciproque est fausse.
   Prenons $f : x \mapsto x$ et $g : x \mapsto \dfrac{x}{2}$. On a $\lim\limits_{+\infty} \exp(g-f) = 0$ et $\lim\limits_{+\infty} \dfrac{g}{f} \neq 0$.

3. On a $f(x) = (\ln(\ln(x)))^{x^{\ln(x)}} = e^{e^{\ln(x)\ln(x)}\ln(\ln(\ln(x)))} = e^{e^{\ln(x)\ln(x)+\ln(\ln(\ln(\ln(x))))}}$
   et $g(x) = (\ln(x))^{x^{\ln(\ln(x))}} = e^{e^{\ln(\ln(x))\ln(x)}\ln(\ln(x))} = e^{e^{\ln(\ln(x))\ln(x)+\ln(\ln(\ln(x)))}}$.
   D'où $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(\ln(x))\ln(x)+\ln(\ln(\ln(x)))}{\ln(x)\ln(x)+\ln(\ln(\ln(\ln(x))))} = 0$.
   On a bien $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x)\ln(x) + \ln(\ln(\ln(\ln(x)))) = +\infty$.
   On itère deux fois le point 1 et on obtient $g \underset{+\infty}{=} o(f)$.

Exercice 11:

1. $\dfrac{(1-\cos(x))(1+2x)}{x^2-x^4} \underset{x\to0}{\sim} \dfrac{\frac{x^2}{2}.1}{x^2} \underset{x\to0}{\sim} \dfrac{1}{2}$. Donc, $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{(1-\cos(x))(1+2x)}{x^2-x^4} = \dfrac{1}{2}$.
2. $\dfrac{\ln(1+\sin(x))}{\tan(6x)} \underset{x\to0}{\sim} \dfrac{\sin(x)}{\tan(6x)} \underset{x\to0}{\sim} \dfrac{x}{6x} = \dfrac{1}{6}$ donc $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\ln(1+\sin(x))}{\tan(6x)} = \dfrac{1}{6}$.
3. $x(3+x)\dfrac{\sqrt{3+x}}{\sqrt{x}\sin(\sqrt{x})} \underset{x\to0}{\sim} \dfrac{3x.\sqrt{3}}{\sqrt{x}.\sqrt{x}} \underset{x\to0}{\sim} 3\sqrt{3}$ donc $\lim\limits_{x\to0} x(3+x)\dfrac{\sqrt{3+x}}{\sqrt{x}\sin(\sqrt{x})} = 3\sqrt{3}$.
4. $$\begin{aligned}\left(\frac{x}{\sin(x)}\right)^{\frac{\sin(x)}{x-\sin(x)}} &= \exp\left(\frac{\sin(x)}{x-\sin(x)}\ln\left(\frac{x}{\sin(x)}\right)\right)\\ &= \exp\left(\frac{\sin(x)}{x-\sin(x)}\ln\left(1-1+\frac{x}{\sin(x)}\right)\right)\\ &= \exp\left(\frac{\sin(x)}{x-\sin(x)}\ln\left(1+\frac{x-\sin(x)}{\sin(x)}\right)\right)\end{aligned}$$
   $$\frac{\sin(x)}{x-\sin(x)}\ln\left(1+\frac{x-\sin(x)}{\sin(x)}\right) \underset{x\to0}{\sim} \frac{\sin(x)}{x-\sin(x)}.\frac{x-\sin(x)}{\sin(x)} = 1$$
   Donc, $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sin(x)}{x-\sin(x)}\ln\left(1+\dfrac{x-\sin(x)}{\sin(x)}\right) = 1$ et donc $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{x}{\sin(x)}\right)^{\frac{\sin(x)}{x-\sin(x)}} = \mathbf{e}$.

Exercice 12: On effectue le changement de variable $t = \dfrac{\pi}{2} - x$ pour ramener le problème en 0.
$\dfrac{\ln(\sin^2(x))}{\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^2} = \dfrac{\ln(\sin^2(\frac{\pi}{2}-t))}{t^2} = \dfrac{2\ln(\cos(t))}{t^2}$. Or, $\dfrac{2\ln(\cos(t))}{t^2} = \dfrac{2\ln(1+\cos(t)-1)}{t^2} \underset{t\to0}{\sim} \dfrac{2(\cos(t)-1)}{t^2} \underset{t\to0}{\sim} -1$ donc $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{\ln(\sin^2(x))}{\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^2} = -1$.

Exercice 13: La fonction f est continue sur $]-1;+\infty[\setminus\{0\}$.
On a $\frac{1}{x}\ln(1+x) \underset{x\to0}{\sim} 1$, donc $\frac{1}{x}\ln(1+x) \underset{x\to0}{\sim} 1$ donc $\frac{1}{x}\ln(1+x) \underset{x\to0}{\longrightarrow} 1$.
Par continuité de l'exponentielle, $(1+x)^{\frac{1}{x}} = \exp\left(\frac{1}{x}\ln(1+x)\right) \underset{x\to0}{\longrightarrow} \mathbf{e}$.
Donc $f : x \mapsto (1+x)^{\frac{1}{x}}$ est prolongeable par continuité en 0 en posant $f(0) = \mathbf{e}$.

Exercice 14: Par composition, f et g sont définies et continues sur $\mathbb{R}_+$ et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. Il reste à étudier la dérivabilité en 0.
On a $\frac{\sin(\sqrt{x})-\sin(0)}{x-0} \underset{x\to0}{\sim} \frac{\sqrt{x}}{x} \underset{x\to0}{\sim} \frac{1}{\sqrt{x}} \underset{x\to0}{\longrightarrow} +\infty$. Donc f n'est pas dérivable en 0.
On a $\frac{\cos(\sqrt{x})-\cos(0)}{x-0} \underset{x\to0}{\sim} \frac{-\frac{\sqrt{x}^2}{2}}{x} \underset{x\to0}{\sim} -\frac{1}{2} \underset{x\to0}{\longrightarrow} -\frac{1}{2}$. Donc g est dérivable en 0 et $g'(0) = -\frac{1}{2}$.